

## Практическое занятие Вычисление пределов

При вычислении предела функции  $y = f(x)$  приходится сталкиваться с двумя существенно различными типами примеров.

1. Функция  $f(x)$  является элементарной и предельное значение аргумента функции принадлежит её области определения, тогда вычисление предела функции сводится к простой подстановке предельного значения аргумента, так как предел элементарной функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , где  $x_0$  входит в область её определения, равен частному значению функции при  $x = x_0$ , то есть  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

2. Функция  $f(x)$  в точке  $x = x_0$  не определена, или же вычисляется предел функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ .

Тогда вычисление предела требует в каждом случае индивидуального подхода. В одних случаях вопрос сводится непосредственно к применению теорем о пределах, свойствах бесконечно малых и бесконечно больших функций и связи между ними.

Более сложными случаями нахождения предела являются такие, когда функция  $f(x)$  в точке  $x = x_0$  или при  $x \rightarrow \infty$  представляет собой

неопределённость типа  $\ll \frac{0}{0} \gg$ ;  $\ll \frac{\infty}{\infty} \gg$ ;  $\ll 0 \cdot \infty \gg$ ;  $\ll \infty - \infty \gg$ ;  $\ll 1^\infty \gg$ ;  $\ll 0^0 \gg$ ;  $\ll \infty^0 \gg$ .

### Решение типовых примеров

**Задача 1.** Вычислить пределы:

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 1}$ .

Решение. Так как  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 5 \neq 0$ , то применим теорему о пределе частного:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 1} = \frac{4 + 2 - 2}{4 + 1} = \frac{4}{5}.$$

2.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5x - 3}{\log_2(x^2 + 1)}$ .

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5x - 3}{\log_2(x^2 + 1)} = \frac{(-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 3}{\log_2[(-1)^2 + 1]} = \frac{-7}{\log_2 2} = -7$$

3.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \right]$ .

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \right] = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) =$$
$$= -\cos\frac{\pi}{6} \cdot \left(-\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

4.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}.$

Решение. Функция  $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$  в точке  $x = 2$  не определена. Так как при  $x = 2$  числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, то имеем неопределенность вида « $\frac{0}{0}$ ». Преобразуем дробь так, чтобы ее можно было бы сократить на  $x - 2$ . Для этого разложим числитель и знаменатель на множители:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3), \text{ так как } x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ при } x_1 = 2, x_2 = 3.$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1), \text{ так как } x^2 - 3x + 2 = 0 \text{ при } x_1 = 2, x_2 = 1.$$

Итак, имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 3)}{(x - 2)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 3}{x - 1} = \frac{2 - 3}{2 - 1} = -1.$$

5.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x + 6}}{x - 3}.$

Решение. При  $x = 3$  числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, следовательно, имеем неопределенность « $\frac{0}{0}$ ». Преобразуем дробь так, чтобы ее можно было сократить на  $x - 3$ . Для этого числитель и знаменатель умножим на выражение, сопряженное иррациональному выражению  $3 - \sqrt{x + 6}$ , то есть на выражение  $3 + \sqrt{x + 6}$ , получим

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x + 6}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3 - \sqrt{x + 6})(3 + \sqrt{x + 6})}{(x - 3)(3 + \sqrt{x + 6})} = \{ \text{перемножив сопряженные}$$

выражения, избавимся от иррациональности в числителе} =

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - (x + 6)}{(x - 3)(3 + \sqrt{x + 6})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - x}{(x - 3)(3 + \sqrt{x + 6})} =$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{(x - 3)(3 + \sqrt{x + 6})} = -\frac{1}{3 + \sqrt{3 + 6}} = -\frac{1}{3 + 3} = -\frac{1}{6}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+6} - 2}{x^2 - 4}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\sqrt{x+6} - 2)(\sqrt{x+6} + 2)}{(x^2 - 4)(\sqrt{x+6} + 2)} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+6-4}{(x^2 - 4)(\sqrt{x+6} + 2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x^2 - 4)(\sqrt{x+6} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+6} + 2)} = \frac{1}{-4(\sqrt{4} + 2)} = -\frac{1}{4(2+2)} = -\frac{1}{16}. \end{aligned}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x+3} - 2}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x+3} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})(\sqrt{x+3} + 2)}{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1-2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x+3-4)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} + 2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{1+3} + 2}{\sqrt{1+1} + \sqrt{2}} = \frac{2+2}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 1}{3x^2 + 2x - 1}.$$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 + 1) = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 + 2x - 1) = \infty$$

Следовательно, имеет место неопределенность вида  $\left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle$ . Разделим числитель и знаменатель дроби почленно на старшую степень дроби, то есть на  $x^3$ , получим:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 1}{3x^2 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x^3}}{\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = \infty.$$

Предел знаменателя равен нулю, следовательно, в знаменателе бесконечно малая функция. Далее применили теорему о связи между бесконечно малой и бесконечно большой величинами.

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}).$$

Решение. В заданном примере имеем неопределенность вида « $\infty - \infty$ ». Умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на сопряженное ему выражение, то есть на  $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}$ , получим:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - (x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = 0. \end{aligned}$$

Так как  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}) = \infty$ , значит в знаменателе бесконечно большая функция. Далее применим теорему о связи между бесконечно большой и бесконечно малой величинами.

10.  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{3-x} - \frac{2}{9-x^2} \right)$ .

Решение. Имеем неопределенность вида « $\infty - \infty$ ». Приведем дроби, стоящие под знаком предела, к общему знаменателю, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{3-x} - \frac{2}{9-x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3+x-2}{9-x^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1+x}{9-x^2} = \infty.$$

### *Задания для решения*

Найти пределы:

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x}$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{3x^2 - 8x - 3}$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 + 10}$ .

4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 5x + 2}{x + 10^{10}}$ .

5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5x - 6}{3x^2 + 7x - x^3 - 1}$ .

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$